Linear Extension Operatorについて (Function Algebra)

AUTHOR(S):

和田, 淳藏

数理解析研究所講究録
169巻 1972年 17-32

Linear extension operator について

早大 教育 和田淳藏

§1. 序

A, Bを complex Banach space とし、RをAからBの上への有界な線型作用素とする。そのときRの右逆有界線型作用素T、すなわちBからAへの有界線型作用素で RT = I (Bの上の恒等写像)となるTが存在するかという問題を考える。その特別な場合として、Mを complex Banach space、NをMの閉線型部分空間とし、RをMから M/N への natural mapping としたとき M/N → M で RT = I となる有界な線型作用素Tを求めるのが linear lifting の問題である。またXを位相空間、FをXの閉部分集合とし、Aを C(X) (Xの上の複素値有界連続関数全体の Banach space)の閉線型部分空間、Bを C(F)の閉線型部分空間とし、A|F (AのFでの制限) = Bとする。ここでRを restriction operator, すなわち R : f → f|F (A → B) とする。そのときRT = Iとなる有界な線型作用素 T : B → A を求めるのが

linear extension の問題であり、もしそのようなTが存在すれば、それを linear extension operator という（もっと一般にベクトル値連続関数の空間 $C(X, E)$ で論じられることもある）。安藤氏（[1], [2]）はこれ等の問題を統一的に、一般の（complex or real）Banach space の立場から取扱い、結果を得られた。ここでは特に linear extension operator の問題について考えて見る。Linear extension operator は古くから Borsuk [4] によって論じられたが、その後 Kakutani [14], Dugundji [8], Pełczyński [16], [17], Michael-Pełczyński [15] などによって発展した。最近は function algebra の linear extension operator が多くの人々によって論じられている。それを中心話題にして行くことにする。

§2 基礎定理

Xを位相空間、FをXの閉部分集合とする。Hを$C(X)$の閉線型部分空間、Eを$C(F)$の閉線型部分空間とし、$H|F \supset E$とする。EからHへの有界な線型作用素Tが linear extension operator であるとは、$\forall f \in E$ で $(Tf)|F = f$ となることである。勿論、つねに linear extension operator が存在するとは限らない（この定義の方が§1より一般である）。

例 1. Nを自然数からなる discrete space としたとき

$C(\beta N - N)$ から $C(\beta N)$ への linear extension operator は存在しない. linear extension operator を論ずる際に、しばしば X または F を metric と仮定するが、その必要性がこの反例からわかる(cf. [18])。

X を位相空間、E をノルム空間とする。$C(X, E)$ を E に値をとる X の上の有界連続関数全体とし、$C(X, E) \ni f$ に対して $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ でノルムを定義する.

定理 2.1 (Borsuk-Dugundji) X を metric space, F を X の閉部分集合とする。そのとき $T: C(F, E) \to C(X, E)$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T が存在する。そして $\forall g \in C(F, E)$ に対して Tg の値域は $g(F)$ の convex hull に含まれる。

定義 X を位相空間、F を X の閉部分集合とし、H、E をおのおの $C(X)$, $C(F)$ の閉線型部分空間とする. (E, H) が bounded extension property をもつとは、$\forall f \in E$, $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \{f_{\varepsilon, W} ; W \supset F$, W は X で open$\} \subset H$ が、$\|f_{\varepsilon, W}\| \leqq M$ (M は W に関係しない)、$|f_{\varepsilon, W}(x)| \leqq \varepsilon$ $(x \in X - W)$ かつ $f_{\varepsilon, W} | F = f$ となるように存在することである。(E, H) が dominated extension property をもつとは X の上の任意の有界正連続関数 $p(x)$ $(p(x) \geqq \exists \alpha > 0)$ と、$|f(x)| \leqq p(x)$ $(x \in F)$ となる $f \in E$ に対して、$g \in H$

が $g|F=f$, $|g(x)| \leqq p(x)$ $(x \in X)$ となるように存在することである。X が normal なら (E, H) が bounded extension property をもつことと、dominated extension property をみたすことは同等である (cf. [15])。

つぎは Michael–Pełczyński [15] によって与えられた。

<u>定理 2.2</u> X は compact metric space で、$(C(F), H)$ が bounded extension property をみたすとする。そのとき $T: C(F) \to H$, $\|T\|=1$ となる linear extension operator T が存在する。

<u>定義</u> separable Banach space E が π_1 − space であるとは、E の有限次元部分空間の列 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ で $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ が E で dense となるものが存在して、E から E_i $(i=1, 2, 3, \cdots)$ の上へのノルム 1 の projection が存在するときをいう。F が compact metric のとき、$C(F)$ は π_1 − space となる。

<u>定理 2.3</u> X を位相空間、E を π_1 − space とし、(E, H) を bounded extension property をみたすとする。そのとき $T: E \to H$, $\|T\|=1$ となる linear extension operator T が存在する。

<u>定義</u> separable Banach space E が metric

approximation property をもつとは、finite rank の線型作用素の列 $P_n : E \to E$, $\|P_n\| \leqq 1$ が存在して、$\forall f \in E$ で $\|P_n f - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ となることをいう。 E が π_1-space なら metric approximation property をみたす。 上の定理 2.3 はつぎのように modify される（[6]）。

定理 2.4　X を位相空間、E が metric approximation property をみたすと仮定する。ここで (E, H) が bounded extension property をみたすとすれば、$T: E \to H$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T が存在する。

いま $T : C(F) \to H$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T を考える。$H \ni 1$ としたとき $T(1) = 1$ となるであろうか。あとの例2で示すように、これは一般には成立しないが、H が自己随伴（$f \in H$ なら $\bar{f} \in H$）ならばよい。

定理 2.5　X を compact metric space, H を自己随伴でかつ $(C(F), H)$ を bounded extension property をみたし、$H \ni 1$ とする。そのとき $T: C(F) \to H$, $\|T\| = 1$, $T(1) = 1$ となる linear extension operator T が存在する。

例 2. X を $\mathbb{C}$ の上の単位円、F を X の上の Lebesgue measure 0 の閉部分集合で少くとも 2 点をもつとする。H を disk algebra としたとき、$(C(F), H)$ は定理 2.2 の仮定をみたす。ゆえに $T: C(F) \to H$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator T の存在は言えるが、$C(F) \to H$, $\|T\| = 1$, $T(1) = 1$ となる linear extension operator は存在しない (cf. [15])。

§3. Peak set

X を compact metric space とし、A を X の上の function algebra とする。いま F を A の peak interpolation set とし、F に関する peaking function を p とする。すなわち $F = \{x \in X : p(x) = 1\}$ かつ $x \notin F$ なら $|p(x)| < 1$ $(p \in A)$。そのとき $\forall f \in C(F)$ に対して f の extension を g とすれば、$\{g p^n ; n = 1, 2, 3, \cdots\}$ が bounded extension property の仮定をみたすから、定理 2.2 より $T: C(F) \to A$, $\|T\| = 1$ となる linear extension operator が存在する。ここでは A を単に $C(X)$ の閉線型部分空間とし、$A|F$ が $C(F)$ で閉である場合を考える。その時に peak set に相当するものを定義する。

定義. X を compact Hausdorff space で、H を $C(X)$ の閉線型部分空間とする。X の閉部分集合 F が H の sharp peak extension set であるとは、$\forall f \in H|F$, $\|f\|_F < 1$, $K \cap F = \phi$ となる X の任意の閉部分集合 K と $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists g \in H$ で $g = f$ on F, $\|g\| < 1$, $|g| < \varepsilon$ on K となることである。

sharp peak extension set はつぎのような性質をもつ。

(1) F を H の sharp peak extension set とし、$f \in H|F$ とする。$p \in C(X)$, $p > 0$ で $p(x) \geqq |f(x)|$ $(x \in F)$ とすれば、$\exists g \in H$ で $g = f$ on F, $|g(x)| \leqq p(x)$ $(x \in X)$。

(2) F が H の sharp peak extension set であるための必十条件は $\forall \mu \in H^{\perp}$ で $\mu_F \in H^{\perp}$。

(3) H を X の上の function algebra で、F を X の閉部分集合とする。F が H の sharp peak extension set となることと、H の p-set (peak set の intersection) となることは同等である (cf. [5], [9], [10])。

つぎは Curtis [5] によって与えられた。

定理 3.1. H を $C(X)$ の閉部分空間とし、F を H の sharp peak extension set、かつ $H|F$ はbasisをもつとする。そのとき $T: H|F \to H$ となる linear extension operator T が存在する。もし K を X の閉部分集合で $K \cap F = \phi$, かつ $0 < \eta < 1$ なら $|Tf(x)| \leqq \eta \|f\|$ $(x \in K)$ となるようにできる。

この証明には、つぎの補題が必要となる。

補題 3.2　Hを$C(X)$の閉線型部分空間とし、FをHの *sharp peak extension set* とする。$\{f_n\}$を$H|F$の関数列とすれば、$\exists\{\tilde{f}_n\}\subset H$でつぎをみたす。

(1)　$\tilde{f}_n = f_n$ on F　$(n=1,2,3,\cdots)$.

(2)　$\|\tilde{f}_n\| = \|f_n\|_F$.

(3)　有界な複素数列$\{\lambda_n\}$で$\sum\lambda_n f_n$がFの上で一様収束すれば$\sum\lambda_n\tilde{f}_n$もXの上で一様収束する。

定理 3.1 の略証.　$H|F$の *basis* を$\{f_n\}$としたとき、上の補題で求められた関数列を$\{\tilde{f}_n\}$とする。$\forall f\in H|F$に対して$f=\sum\lambda_n(f)f_n$の形となる。線型汎関数の列$\{\lambda_n\}$は一様有界なるゆえ、上の(3)より$\sum\lambda_n(f)\tilde{f}_n$は一様収束する。ゆえに$Tf=\sum\lambda_n(f)\tilde{f}_n$とおけば、$T: H|F \longrightarrow H$は *linear extension operator* となる。

いまHを$C(X)$の閉線型部分空間とし、つぎをみたすとする。(*)　$\forall\mu\in H^{\perp}$に対して$\mu_F=0$.　このときFはHの *sharp peak extension set* でかつ$H|F=C(F)$となる。ゆえに *sharp peak extension set* の性質(1)より$(C(F), H)$は *dominated extension property* をみたす。これは Rudin－Carleson－Bishop の定理として知られている (cf. [3])。

定理 3.3　Xを *compact metric space* とし、Hを

$C(X)$ の閉線型部分空間とする。もし F が $(*)$ をみたせば、$T: C(F) \to H$, $\|T\|=1$ となる linear extension operator T が存在する。

これは F が sharp peak extension set でかつ $H|F = C(F)$ となることから定理 2.2 より明らか。

§4. Function algebra の場合

A を compact Hausdorff space X の上の function algebra とし、F を A の interpolation set、すなわち $A|F = C(F)$ となる X の閉部分集合とする。F を extension constant C をもつ interpolation set (type $\mathrm{I}(C)$) であるとは、$\forall f \in C(F)$ に対して $\exists g \in A$ が $g = f$ on F, かつ $\|g\|_X \leqq C\|f\|_F$ となることとする。F が type $\mathrm{I}(1^+)$ であるとは、$\forall f \in C(F)$, $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists g \in A$ が $g = f$ on F かつ $\|g\|_X \leqq (1+\varepsilon)\|f\|_F$ のようになることである。F が p-set で interpolation set なら type $\mathrm{I}(1)$, F が Gamelin [9] の意味で $e(A|F) = 1$ のような interpolation set なら type $\mathrm{I}(1^+)$ となる。

つぎの2つは Varopoulos [19] によって与えられた。

<u>定理 4.1</u> A を compact Hausdorff space X の上の function algebra、F を metric かつ type $\mathrm{I}(1)$ とする。そのとき $T: C(F) \to A$, $\|T\|=1$ となる linear

extension operator T が存在する。

定理 4.2　A を X の上の function algebra、F を metric かつ type I(1^+) とする。そのとき $\forall \varepsilon > 0$ に対して $T_\varepsilon : C(F) \to A$, $\|T_\varepsilon\| < 1+\varepsilon$ となる linear extension operator T_ε が存在する。

任意の interpolation set については、一般に linear extension operator は存在しない。

例 3　ある compact metric space X と、その上の function algebra A、そして A のある interpolation set F で、$C(F) \to A$ となる linear extension operator が存在しないことを示す（[6]）。

$X = \{ z = (z_1, z_2, \cdots) : |z_i| \leqq 2 \}$ に weak topology を入れる。これは compact metric space である。A を $z_1, z_2, z_3, \cdots$ のすべての多項式の集合の X の上での閉包とする。A は X の上の function algebra である。つぎに $\{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$ を c_0 の unit ball の中で dense にとる。ここで $(f_j)_i = 0$（十分大きな i で）と仮定出来る。$x_i \in X$ を $(x_i)_j = (f_j)_i$ で定義する。$\forall j$ で $(x_i)_j \to 0$ $(i \to \infty)$ なるゆえ、$x_i \to 0 = (0, 0, 0, \cdots)$。ここで $F = \{0\} \cup \{x_1, x_2, \cdots\}$ とおけば F は A の interpolation set でかつ $C(F) \to A$ となる linear extension operator

が存在しないことが証明出来る。

さて A を X の上の function algebra, $X \supset F$ を metric で interpolation set とする。また F_0 を X の閉部分集合で、$F \supset F_0$ とする。もし $C(F) \to A$ となる linear extension operator T が存在すれば、$C(F_0) \to A$ となる linear extension operator T_0 も $\|T_0\| = \|T_1\|$ のように存在することは容易にわかる。これは定理 2.1 により $\varphi : C(F_0) \to C(F)$, $\|\varphi\| = 1$ となる linear extension operator φ が存在するからである。では和集合の場合はどうなるか。つぎの 2 つの定理がそれに答える。

<u>定理 4.3</u>　A を compact metric space X の上の function algebra、F を type $\mathrm{I}(C)$ の集合とする。$\exists M > 0$ で、peak point でない $\forall x \in F$ で、ある x の近傍 $V(x)$ で $F \cap \overline{V(x)}$ がノルム $\leqq M$ の linear extension operator をもつとする。そのとき F も linear extension operator (そのノルムは M と C とに depend する) をもつ。

<u>定理 4.4</u>　A を compact metric space X の上の function algebra, F を interpolation set で $F = F_1 \cup F_2$ (F_1, F_2 ともに X の閉部分集合) とする。もし F_1, F_2 がともに linear extension operator をもてば F も linear extension operator をもつ。

すでに示されたように、interpolation set は linear extension operator をもつとは限らない。つぎに concrete な function algebra の interpolation set が linear extension operator をもつかどうか考えて見る。

D を $\mathbb{C}^n$ の中の bounded open subset. $A(D)$ を $\bar{D}$ の上で連続で D で analytic な関数全体の function algebra とする。

<u>定理 4.5.</u> A を $A(D)$ を含む $\bar{D}$ の上の function algebra で $\forall p \in \partial D$ は A の peak point とする。そのとき A の任意の interpolation set は linear extension operator をもつ。

(注) D が strictly pseudoconvex domain で C^2 boundary をもてば $A = A(D)$ は 定理 4.5 の条件をみたす (cf. [12]).

つぎに $D = \Delta^n$ (polydisc, $n \geqq 2$) としたとき、D は定理 4.5 の条件はみたさない。しかしつぎが成立つ。

<u>定理 4.6.</u> $A(\Delta^n)$ の任意の interpolation set は linear extension operator をもつ。

また X を compact plane set で、$R(X)$ を X の外側に pole をもつ rational function 全体の X の上での閉包とする。

<u>定理 4.7.</u> $R(X)$ の任意の interpolation set は linear

extension operator をもつ。

(注) 定理 4.3 — 4.7 は Davie [6] による。Dufresnoy [7] も類似な結果を得た。

さて function algebra の linear extension operator を論ずる場合、X または F に metric space の条件がつけられているが、それをはずして任意の位相空間または compact Hausdorff space で考える際は、別に強い条件を入れなければ成立しない。例えば A を compact Hausdorff space X の上の function algebra とし、その essential set E_A が $\partial_{A|E_A}$ に一致すると仮定する。そのとき interpolation set F が閉かつ開ならば F は linear extension operator をもつ。つぎに interpolation set F が G_δ set となる場合を考えて見る。いま X を compact F－space とする。位相空間 X が F－space であるとは、disjoint な 2つの F_σ open set が disjoint closure をもつときをいう。自然数全体 N の Čech compactification βN は F－space である。ところで X の上の function algebra A が $E_A = \partial_{A|E_A}$ をみたせば、G_δ set となる interpolation set F は peak interpolation set となる ([20])。しかし F が peak interpolation set となっても F が linear extension operator をもつとは限らない。A を βN の上の Hoffman－Ramsay ([13]) に

よって与えられた function algebra とする。ここでは $E_A = \partial A | E_A$ でかつ E_A は $\beta N - N$ の proper subset となる。ゆえに E_A と disjoint な open かつ closed な infinite subset $F \subset \beta N$ がとれる。ゆえに $\exists N_1 \subset N$ で $F = \overline{N_1}^{\beta N}$ (cf. [11])。ここで $F_0 = F - N_1$ とおく。勿論 $F_0 \subset X - E_A$ で G_δ set, それゆえ F_0 は peak interpolation set。しかし F_0 は linear extension operator をもたない。なぜなら $F = \beta N_1$, $F_0 = \beta N_1 - N_1$ と考えられることから例1より明らか。ゆえに linear extension operator を考える際は F-space を含めた広範囲な空間で考えることは出来ない。

Davie [6] はつぎのような興味ある問題を出している: A を finitely generated function algebra とする。すなわちある n で $\mathbb{C}^n$ の compact subset X で $A = P(X)$ となるとき、A のすべての interpolation set は linear extension operator をもつか? 今までに示したように、特別な場合には問題は解けている。

文　献

[1] T. Ando: Closed range theorems for convex sets and linear liftings, to appear (Pacific J. Math).

[2] 安藤毅: Dominated extension と linear lifting,

"Function Algebra" 数理解析研究所講究録 143 (1972年5月).

[3] E. Bishop: A general Rudin-Carleson theorem, Proc. Amer. Math. Soc, 13 (1962) 140-143.

[4] K. Borsuk: Über Isomorphie der Funktionalräume, Bull. Int. Acad. Polon. Sci., (1933) 1-10.

[5] P. C. Curtis: Topics in Banach Spaces of Continuous Functions, Lecture Notes Series NO. 25 (University of Aarhus) 1970.

[6] A. M. Davie: Linear extension operators for spaces and algebras of functions, to appear.

[7] A. Dufresnoy: Sur les compacts d'interpolation du spectre d'un algèbre uniforme et la propriété d'extension linéaire bornée, C. R. Acad. Sc., t 273 (1971) 568-571.

[8] J. Dugundji: An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math., 1 (1951) 353-367.

[9] T. W. Gamelin: Restrictions of subspaces of C(X), Trans. Amer. Math. Soc., 112 (1964) 278-286.

[10] ——— : Uniform Algebras, Prentice-Hall, 1969.

[11] L. Gillman and M. Jerison: Rings of Continuous

Functions, Van Nostrand, 1960.

[12] R. C. Gunning and H. Rossi: Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, 1965.

[13] K. Hoffman and A. Ramsay: Algebras of bounded sequences, Pacific J. Math. 15 (1965) 1239–1248.

[14] S. Kakutani: Simultaneous extension of continuous functions considered as a positive linear operation, Japan. J. Math. 17 (1940) 1–4.

[15] E. Michael and A. Pełczyński: A linear extension theorem, Illinois J. Math. 11 (1967) 563–579.

[16] A. Pełczyński: On simultaneous extensions of continuous functions, Studia Math., 24 (1964) 285–304.

[17] ———: Supplement to my paper "On simultaneous extensions of continuous functions", Studia Math., 25 (1964–5) 157–161.

[18] Z. Semadeni: Banach Spaces of Continuous Functions, Vol. 1, 1971 (Monografie Matematyczne 55, Warszawa).

[19] N. Th. Varopoulos: Un problème d'extension linéaire dans les algèbres uniformes, Ann. Inst. Fourier 21 (1971) 263–270.

[20] J. Wada: On the union of interpolation sets, Yale Univ. におけるセミナー (1971).